A

MÁSODRENDŰ KÚPOKTÓL BURKOLT

MINIMÁLFELÜLETEK.

DOCTORI ÉRTEKEZÉS,

MELYET A KOLOZSVÁRI FERENCZ-JÓZSEF TUDOMÁNY-EGYETEM MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARÁNAK BENYUJT

FRAENKEL JENŐ.

KOLOZSVÁR
STIEF JENŐ ÉS TÁRSA KÖNYVSAJTÓJA
1914

A

MÁSODRENDŰ KÚPOKTÓL BURKOLT

MINIMÁLFELÜLETEK.

DOCTORI ÉRTEKEZÉS,

MELYET A KOLOZSVÁRI FERENCZ-JÓZSEF TUDOMÁNY-EGYETEM MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARÁNAK BENYUJT

FRAENKEL JENŐ.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

KOLOZSVÁR
STIEF JENŐ ÉS TÁRSA KÖNYVSAJTÓJA
1914

Digitized by the Internet Archive
in 2026

119. sz. 150 pl.

https://archive.org/details/IA41544719_0034

BEVEZETÉS.

A másodrendű kúpoktól burkolt minimálfelületek összességét H. A. Schwarz állapította meg. (Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden. Crelle-féle Journal, 80. kötet, 1875, p. 301—314; Gesammelte Mathematische Abhandlungen, 1. Bd., Berlin, 1890., p. 190—204.). A burkoló kúpok concyklikusok, vagyis a párhuzamos síkok ugyanazon két serege körökben metszi ki őket. A szóban forgó felületcsoport — az egyes felületek térbeli helyzetétől eltekintve — a felületeknek egy 4 parametertől függő végtelen sokaságát tartalmazza. Mindezek transcendens felületek, melyek egy algebrai görbe-sereget tartalmaznak, nevezetesen azon (általánosan szólva: negyedrendű) algebrai görbék egyszeresen végtelen seregét, melyek mentén a másodrendű kúpok érintik a felületet.

Ezen felületeknek eddig csak nehány speciális-, illetve határesete van részletesebben megvizsgálva, általánosan — tudtommal — megvizsgálva még nincsenek.

Az ezen felületcsoportba tartozó, eddig megvizsgált felületek irodalma a következő.

A minimálfelületek Lagrangetól[1] felállított differentialegyenletének:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

(melyben p, q, r, s, t szokott jelölés szerint z-nek, mint x

[1] Miscellanea Taurinensia, t. 2., 1761, p. 188—190.

és y függvényének első és második partialis deriváltjai, hol x, y, z a felület pontjainak derékszögű coordinátái), Meusnier adott először particularis megoldásokat 1776-ban. (Mémoires de Mathém. et de Phys., prés. par divers Savans, t. X. Paris, 1785, p. 502—508.)

Az egyik particularis megoldáshoz: egy egyenesnek egy fix tengelyre merőlegesen való csavarmozgásából származó csavarfelület egyenletéhez oly módon jut el Meusnier, hogy a differentialegyenletet két egyszerűbbre bontja szét:

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0 \quad \text{és} \quad r + t = 0,$$

melyek együttes fennállása mellett a fentebbi egyenlet is teljesül. Egy más particularis megoldáshoz: a láncgörbének a vezérvonala körüli forgatásából származó felülethez, vagyis Plateau elnevezése szerint a „catenoid"-hoz[1] azon követelésből jut el, hogy a felület forgásfelület legyen. Ezt a felületet már Euler is ismerte. (Methodus inveniendi lineas curvas etc. Lausannae et Genevae, 1744, p. 194—195.)

Mint H. A. Schwarz felismerte (Ges. Math. Abh. I, p. 198—199.) mindkét felület a szóban forgó felületcsoporthoz tartozik, mint határesetek.

A Meusnier-féle csavarfelület az egyedüli reális min. felület, mely egyenes mozgásából származtatható. Ezt a tételt először Catalan bizonyította be (Liouville-féle Journal, 7 (1.) kötet, 1842, p. 203—211.). E tételre azóta rendkívül sok különféle bizonyításunk van. (Wantzel: L'Institut, 11. année, 1843., 1. sect., No. 479, p. 73.; Bonnet: Journal de l'École polyt., t. 19. (Cah. 32), 1848, p. 134—136; Schwarz: l. c. p. 181—182; Darboux: Leçons sur la théorie gén. des surfaces, t. 1., Paris, 1887, p. 17, stb. stb.)

Speciális min. felületek meghatározására a Meusnier-féle eljárást követi még Catalan is. A tőle meghatározott min.

[1] E felületről l.: B. Goldschmidt: Determinatio etc. Commentatio praemio reg. ornata. Göttingen, 1831.

felületek közül legnevezetesebb az ú. n. „Catalan-féle felület“,[1] mely egy sereg parabolát tartalmaz és melynek egy parabola és egy cycloid geodätikus vonalai. (Comptes Rendus, t. 41, 1855, p. 1022; Journal de l'École polyt., t. 21, (Cah. 37.), 1858, p. 160—163).

B. Riemann a K. Hattendorff feldolgozásában megjelent posthumus értekezésében (Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, Bd. 13., 1866—67, p. 45—52) meghatározta azon min. felületeket, melyek párhuzamos síkokban levő körök seregét tartalmazzák. Ezek közé tartozik természetesen a catenoid is. Ezen felületek ki is merítik a cyklikus min. felületek összességét. Ezt a tételt először A. Enneper mutatta ki (Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, Jahrg. 1866, p. 243—249; Zeitschrift für Mathem., Bd. 14, 1869, p. 403—406), utána többen egyszerűbb úton is beigazolták, legegyszerűbben H. A. Schwarz (l. c. p. 330—331). Ezen felületeket részletesebben Schwarz vizsgálta meg.[2] (ibid. p. 186—187; 220.)

Weierstrass tétele szerint (l. Schwarz, l. c. p. 181) egy min. felület teljesen meg van határozva, mihelyt egyetlen analytikai vonala és ennek mentén a felület normálisai folytonos módon adva vannak. A zürichi polytechnikumnak az 1874-ik évre kitűzött pályatétele olyan min. felületek meghatározását kívánta, melyeknek egy síkbeli geodätikus vonala adva van. A két koszorúzott pályamunka (L. Henneberg: Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben. Dissert., Zürich, 1875; A. Herzog: Bestimmung einiger speciellen Minimalflächen. Inaug.

[1] Adjungáltjáról l. W. Thienemann, Ueber eine transc. Minimalfläche etc. Inaug.-Dissert. Giessen, 1890.

[2] Schwarz eljárását l. H. M. J. Relander: Bestimmung der Minimalflächen etc. Dissert. Helsingfors, 1888, p. 21—25. E felületekről szól G. Juga értekezése is: Die cyklischen Minimalflächen, Inaug. Dissert. Strassburg 1898; Mathem. Annalen, Bd. 52, 1899. p. 167—170.

Dissert, Zürich, 1875.) meghatározza azon min. felületeket, melyeknek egy síkbeli geodätikus vonala egy kúpszelet. Schwarz felfedezése szerint (l. c. p. 190, 199—200) ezen transcendens felületek egy sereg negyedrendű algebrai görbét tartalmaznak és ezek mentén másodrendű kúpokat érintenek. Ha a síkbeli geod. vonal parabola, akkor a Catalan-féle felületet, ha kör, a catenoidot kapjuk.

Enneper 1882-ben olyan további min. felületeket fedezett fel, melyek egy sereg parabolát tartalmaznak. (Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, Bd. 29, 1882, p. 49—50). Mindezek határesetek gyanánt a szóban forgó felületcsoporthoz tartoznak. Ezen u. n. „Enneper-féle felületek"-nek[1] egy speciális esetét képezi a már említett Catalan-féle felület is.

Az Enneper-féle felületek ki is merítik azon min. felületek összességét, melyek egy sereg parabolát tartalmaznak. E tételt M. Peche bizonyította be. (Analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche eine Schar reeller Parabeln enthalten. Inaug.-Dissert., Göttingen, 1891). Egy sereg reális és valódi hyperbolát vagy ellipszist tartalmazó min. felület (eltekintve a síktól) nem létezik. (M. Peche: Welche Minimalflächen sind Träger einer Schar reeller Hyperbeln? Főreáliskolai értesítő, Breslau, 1903; H. A. Schwarz: Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wissensch., Berlin, 1903, p. 39.).

Jelen dolgozatban a szóban forgó felületcsoportot a maga összességében veszem szemügyre.

A felületcsoport nevezetesebb tulajdonságai a következők.

Általánosan szólva minden idetartozó felületen vannak olyan izolált síkgörbék, melyek mentén a felület egy elliptikus-, és olyanok, melyek mentén egy hyperbolikus hengert

[1] E felületekről l. Hj. Tallqvist: Öfversigt etc. 31. kötet, Helsingfors, 1888—89, p. 32—51, hol egy ilyen felület egy modelljének fényképe is látható.

érint. E tulajdonságok bármelyikéből meg is határozható a felületcsoport. A csoporthoz tartoznak, mint határesetek, azon min. felületek is, melyek egy parabolikus vagy egy körhengert egy síkmetszet mentén érintenek.

A csoporthoz tartozó minden felület három speciális felület geometriai additiójából áll elő, melyek egyikének egy ellipszis, másikának egy hyperbola egy geodätikus vonala, a harmadik egy ellipszissel, mint geodätikus vonallal biró felületnek az Ossian Bonnet-féle adjungáltja. (1. pont.)

A felületen az algebrai görbék és orthogonalis trajectoriái isometrikus rendszert alkotnak.

A csoporthoz tartozó minden felületnek a Bonnet-féle adjungáltja is a csoporthoz tartozik. Egy felület algebrai görbéinek az adjungált felületen az algebrai görbék orthogonalis trajectoriái felelnek meg és viszont.

A csoportban kétszeresen végtelen sok olyan felület is van, mely az adjungáltjával congruens. Ezek egy egyenlőoldalú hyperbolával, mint geod. vonallal biró felületnek és egy speciális cyklikus min. felületnek geometriai additiójából származnak. (2. pont.)

Az Enneper-féle felületek adjungáltjainak kivételével minden idetartozó felület egyoldalú. (3. pont.)

Ugyanezen kivétellel mindenik periodikus.

A csoporthoz tartozó minden felület a tér végtelen távoli síkját ugyanazon két egyenesben metszi, melyben a cyklikus síkok is metszik azt. Kivételes viselkedést mutatnak a cyklikus min. felületek, melyek a végtelen távoli síkot csak egy egyenesben, a rajtuk levő körök (párhuzamos) síkjainak végtelen távoli egyenesében metszik.

A felületen visszatérő- és kettősélek lépnek fel. (4. pont.)

Minthogy a felület egy algebrai görbesereget tartalmaz, azért a hozzátartozó Weierstrass-féle $\mathfrak{f}(s)$ függvény algebrai. (5. pont.). —

Nem mulaszthatom el e helyen is leghálásabb köszönetemet nyilvánítani Dr. H. A. Schwarz prof. úrnak, ki fel-

keltette érdeklődésemet a minimálfelületek elmélete iránt és kitől buzdulást és útmutatást nyertem tanúlmányaimhoz.

1.

Ha egy minimálfelületet másodrendű kúpok burkolnak, akkor a burkoló kúpok, mint H. A. Schwarz bebizonyította,[1] szükségképen concyklikusok. Ezeknek a kúpoknak tehát a párhuzamos normálisok szerint a Gauss-féle gömbre való leképezései confocalis kúpszeleteket alkotnak.[2]

Helyezzük derékszögű coordinata-rendszerünket úgy el, hogy y-tengelye a körökben metsző síkok mindkét seregével párhuzamos legyen, z-tengelye mindkét sereg síkjaival ugyanakkora szöget alkosson, mely szöget $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ jelöljön.

A cyklikus síkok egyenlete ilyen coordinata-rendszerben:

$$\sin\varepsilon \cdot x \pm \cos\varepsilon \cdot z = \text{const.}$$

Ha a Gauss-féle gömb középpontja a coordinata-rendszer origójában van, akkor a gömbi kúpszeletek közös reális focusai, ha

$$k = \sin\varepsilon, \qquad k' = \cos\varepsilon,$$

a következők:

$$x = \pm k, \quad y = 0, \quad z = \pm k'.$$

Az általános esetben, mikor $0 < k < 1$, a gömbi confocalis kúpszeletek közt van egy teljes nagy-gömbkör is, nevezetesen a $z = 0$ aequator köre. Az ehez tartozó kúp összes alkotói egymással párhuzamosak, nevezetesen valamennyi párhuzamos a z-tengellyel. Ez a kúp tehát elliptikus hengerré fajúl (mely határesetben egyetlen egyenessé húzódhatik össze.)

Két végtelen közeli concyklikus kúp egymást mindig

[1] Ges. Math. Abh. I., p. 200—204.

[2] l. pl. G. Salmon—W. Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes, I. Teil, Leipzig, 1879, p. 158. A gömbi kúpszeletekről: ibid. p. 340—362.

gömbi görbében metszi, melyet tartalmazó gömb átmegy a kúp csúcsán (és esetleg síkká fajúlhat el). A Gauss féle gömb aequatorához tartozó kúp csúcsa a végtelenben lévén, a megfelelő görbét tartalmazó gömb szükségképen síkká fajúl el. Az általános min. felület tehát, melyet másodrendű kúpok burkolnak, egy elliptikus hengert egy síkmetszete mentén érint. De Weierstrass említett tétele szerint ezáltal egyértelműleg meg is van határozva.

Egy elliptikus henger egyenlete legyen:

$$(1.)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad b>a.$$

Gudermann jelölésmódja szerint a sinamu, cosamu, Δamu elliptikus függvényeket röviden snu, cnu, dnu jelölvén, ezen egyenlet parameteresen így irható:

$$(2.)\quad \left.\begin{aligned} x &= -a\,\mathrm{cn}\,u \\ y &= b\,\mathrm{sn}\,u \end{aligned}\right\} \mathrm{mod}: k=\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2}=\sin\varepsilon.$$

Ezt a hengert messük át egy síkkal, melynek egyenlete

$$(3.)\quad \alpha x+\beta y=\gamma z$$

legyen.

Határozzuk meg azon min. felületet, mely a hengert ezen síkkal való metszésvonala mentén érinti.

A Schwarz-féle formulák[1] szerint a keresett min. felület egyenletei:

$$(4.)\qquad x'=\Re U, \qquad y'=\Re V, \qquad z'=\Re W,$$

hol

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} U &= x+i\int(Zdy-Ydz), \\ V &= y+i\int(Xdz-Zdx), \\ W &= z+i\int(Ydx-Xdy). \end{aligned}\right.$$

Ezekben x' y' z' a min. felület pontjainak coordinátái, az $\Re$ jel azt jelöli, hogy az utána következő complex menynyiségnek csakis a reális része veendő, x, y, z az adott

[1] Schwarz, l. c. p. 179.

érintkezési görbe pontjainak coordinátái, melynek mentén a felület normálisainak adott irányocosinusai: X, Y, Z, és végre i a képzetes egység.

A jelen esetben, ha feltesszük, hogy $\gamma \neq 0$:

$$x = -a\,\mathrm{cnu}, \qquad X = \frac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}},$$

$$y = b\,\mathrm{snu}, \qquad Y = -\frac{k'\mathrm{snu}}{\mathrm{dnu}},$$

$$z = \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta}{\gamma}y, \qquad Z = 0,$$

hol k' a complem.-modulus:

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{a}{b} = \cos\varepsilon.$$

Ezeknek az (5) alatti egyenletekbe való beirása után, ha az u változót $w = u - iv$ -vel helyettesítjük és ha az $\alpha\ \beta\ \gamma$ számokat olyan arányossági factorral gondoljuk átszorozva, hogy $\gamma = b$ legyen, akkor a min. felület egyenletei gyanánt a következőkhöz jutunk:

$$(4.) \qquad x' = \Re U, \qquad y' = \Re V, \qquad z' = \Re W,$$

hol[1]

$$(6.) \quad \begin{cases} U = \alpha i \int_0^w k'^2 \mathrm{sn}^2 w\,dw - \beta \frac{k'i}{k^2} \mathrm{dn}w - \gamma k' \mathrm{cn}w, \\ V = -\alpha \frac{k'i}{k^2} \mathrm{dn}w + \beta i \int_0^w \mathrm{cn}^2 w\,dw + \gamma \mathrm{sn}w, \\ W = -\alpha k' \mathrm{cn}w + \beta \mathrm{sn}w - \gamma i \int_0^w \mathrm{dn}^2 w\,dw. \end{cases}$$

Ezen egyenletek szerint x' y' z' az $\alpha\ \beta\ \gamma$ constansokra nézve homogen linearis:

$$(7.) \quad \begin{cases} x' = x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 & x_0 = \alpha x_0' \\ y' = y_0 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 & y_0 = \beta y_0' \\ z' = z_0 + \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 & z_0 = \gamma z_0'. \end{cases}$$

[1] V. ö. Schwarz, l. c. p. 197.

Ha a (6.) alatti egyenletek jobboldalait a bennük szereplő elliptikus függvényeknek és az

$$E(w) = \int_0^w dn^2 w dw$$

függvénynek összeadási tételei szerint valós és képzetes részekre bontjuk fel és csakis a valós részeket tartjuk meg, akkor a következő kifejezésekhez jutunk:[1]

$$(8.)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{snvi\ cnvi}{i\ dnvi} \cdot \dfrac{k'^2}{N} cn^2u, \\ y_2 = \dfrac{snvi\ cnvi\ dnvi}{i} \cdot \dfrac{sn^2u}{N}, \\ z_3 = \dfrac{i\ cnvi\ dnvi}{snvi} \cdot \dfrac{1}{N}; \\ z_2 = y_3 = \dfrac{snu\ cnvi\ dnvi}{N}, \\ x_3 = z_1 = -k' \dfrac{cnu\ cnvi}{N}, \\ y_1 = x_2 = -k' \dfrac{snu\ cnu\ snvi\ cnvi}{i\,N}; \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} x_0 = \alpha\left\{\dfrac{1}{i}\dfrac{k'^2}{k^2}E(vi) - \dfrac{k'^2}{k^2}v - k'^2 \dfrac{snvi\ cnvi}{i\ dnvi}\right\} = \alpha x'_0, \\ y_0 = \beta\left\{-\dfrac{1}{i\,k^2}E(vi) + \dfrac{k'^2}{k^2}v\right\} = \beta y'_0, \\ z_0 = \gamma\left\{\dfrac{1}{i}E(vi) - i\dfrac{cnvi\ dnvi}{sn\ v}\right\} = \gamma z'_0, \end{cases}$$

melyekben

$$N = 1 - k^2 sn^2u\ sn^2vi.$$

$(\alpha, \beta, \gamma, k)$ a 4 tetszőleges reális parameter, melyek közül k csak 0 és 1 közt változhatik:

$$0 < k \leq 1.$$

A (4.) és (6.) alatti egyenletek szerint a csoporthoz

[1] V. ö. Schwarz, l. c. p. 194, 197.

tartozó bármely felület az $(\alpha, 0, 0, k)$, $(0, \beta, 0, k)$, $(0, 0, \gamma, k)$ parameterekhez tartozó felületek geometria additiójából áll elő, mely műveletnél azon pontokhoz tartozó vectorok adódnak össze, melyeknél a felületek érintősíkjai egymással párhuzamosak.

A meghatározott felületet csakugyan másodrendű kúpok burkolják, mert a következő egyenletek identikusan teljesülnek:

$$(10.)\quad (\mu+1)(x'-x_0)^2+(\mu+k'^2)(y'-y_0)^2+\mu(z'-z_0)^2=0$$

$$\text{hol} \qquad \mu = k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} vi$$

és

$$\frac{snvi \,.\, dnvi}{i\, cn^3 vi}\left\{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2\right\}$$

$$(11.)\qquad -\left\{\alpha(x'-x_0)+\beta(y'-y_0)+\gamma(z'-z_0)\right\}=0.$$

A (11.) alatti egyenlet baloldala a (10.) alatti egyenlet baloldalából úgy származik, hogy azt mint x' y' z' és v függvényét fogjuk fel és v szerint partialisan differentiáljuk.

v-nek minden értékéhez tartozik egy kúp. A felületen a $v = \text{const.}$ vonalak az (általánosan szólva: negyedrendű) algebrai görbék, melyek mentén a kúpok érintik a felületet. A kúpok csúcspontjainak coordinátái:

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

A szokott jelölésmód szerint

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad E = \int_0^1 \frac{(1-k^2z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \qquad E' = \int_0^1 \frac{(1-k'^2z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

lévén, mivel

$$\lim_{v=K'} x'_0 = -\frac{k'^2}{k^2} E' \qquad \lim_{v=K'} \mu = -k'^2$$

$$\lim_{v=K'} y'_0 = \infty \qquad \lim_{v=K'} (\mu + k'^2) = 0$$

$$\lim_{v=K'} z'_0 = K'-E' \qquad \lim_{v=K'} (\mu + 1) = k^2$$

$$\lim_{v=K'} (\mu + k'^2) y_0^2 = \beta^2 \frac{k'^2}{k^2},$$

azért a $v = K'$ vonal mentén érintő kúp, ha $\beta \neq 0$, hengerré fajúl, melynek egyenlete:

$$(12.)\quad k'^2 (z + \gamma E' - \gamma K')^2 - k^2 (x + \alpha \frac{k'^2}{k^2} E')^2 = \beta^2 \frac{k'^2}{k^2},$$

mely tehát hyperbolikus henger. Ennek a hengernek a Gauss-féle gömbön azon kétszeresen számítandó nagy-gömbkördarab felel meg, mely az

$x = -k, \quad y = o, \quad z = k'$ focust az

$x = k, \quad y = o, \quad z = k'$ focussal köti össze.

A $v = K'$ vonalat tartalmazó gömb a következőbe megy át:

$$\alpha x - \beta y + \gamma z = -\alpha^2 \frac{k'^2}{k^2} E' + \beta^2 (K' - \frac{1}{k^2} E') + \gamma^2 (K'-E').$$

A min. felület tehát a $v = K'$ vonalnál egy hyperbolikus hengert annak egy síkkal való metszővonala mentén érint. Minthogy a metszősík iránya számára két tetszőleges parameter: az $(\alpha, -\beta, \gamma)$ számok viszonya áll rendelkezésünkre, azt is mondhatjuk, hogy az általános min. felületet, melyet másodrendű kúpok burkolnak, úgy állíthatjuk elő, hogy meghatározzuk azon min. felületet, mely egy hyperbolikus hengert egy síkmetszete mentén érint.

Továbbá minthogy egy körhenger úgy tekinthető, mint az (1.) alatti elliptikusnak határesete, ha $\lim \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - a^2} =$

$\lim k = o$, egy parabolikus henger: $x^2 = 2py$ pedig úgy, mint az (1.) alatti elliptikus hengernek határesete, ha x, y helyébe $\frac{a^2x}{bp}, \frac{a^2y}{bp} - b$ mennyiségeket írjuk és $\lim \frac{a}{b} = \lim k' = o$, azért azon min. felületek, melyek egy körhengert vagy egy parabolikus hengert egy síkmetszete mentén érintenek, mint határesetek, a (4.) és (6.) alatti egyenletekkel meghatározott felületek közt vannak.

Azonnal felismerhető, hogy meghatározott felületeink közé tartoznak, mint speciális esetek, azon min. felületek, melyeknek egy kúpszelet egy geodätikus vonala. Ezek t. i. egy másodrendű hengert egy a henger alkotóira merőleges síkmetszet mentén érintenek.

További speciális esetek feltalálására keressük fel meghatározott felületeink közül azokat, melyeknél valamennyi algebrai görbe 4-nél alacsonyabb rendű.

Mivel a felületen levő algebrai görbék gömbi görbék, azért ezek csak két esetben lehetnek 4-nél alacsonyabbrendűek, t. i. ha vagy mind körök, vagy pedig, ha az őket tartalmazó valamennyi gömb síkká fajúl el.

Hogy a felületen minden algebrai görbe kör legyen, az elliptikus hengerrel való érintkezési vonalnak is körnek kell lennie, mikor is az

$$\alpha x + \beta y = \gamma z$$

sík cyklikus sík, tehát

$$\alpha = \rho k, \quad \beta = o, \quad \gamma = \pm \rho k',$$

hol ρ egy tetszőleges (zérustól különböző) reális szám.

A (7.) alatti egyenletekből a (8.), (4.) és (6) alattiak figyelembe vételével azt kapjuk, hogy ezen esetben:

$$\alpha x' - \gamma z' = \alpha(x_0 + \alpha x_1) + \gamma(z_0 + \gamma z_3) =$$

$$= \rho^2 \Re \left\{ k^2 i \int_0^w k'^2 sn^2 w dw + k'^2 i \int_0^w dn^2 w dw \right\} =$$

$$= \rho^2 k'^2 \Re \left\{ i \int_0^w dw \right\} = - \rho^2 k'^2 v.$$

A $v = \text{const.}$ vonalak tehát párhuzamos síkokban levő síkgörbék s minthogy síkjuk összeesik egy-egy cyklikus síkkal, csakugyan körök. Ezen felületek tehát azonosak azon felületekkel, melyeket Riemann fentidézett értekezésében határozott meg.

Nézzük már most, mely esetben fog valamennyi algebrai görbét tartalmazó gömb síkká fajúlni?

A gömb egyenlete a (10.) alatti egyenlet baloldalának v-szerinti differentiálásából áll elő:

$$\frac{d\mu}{dv}\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}-2\left\{\left((\mu+1)(x-x_0)\frac{dx_0}{dv}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\mu+k'^2)(y-y_0)\frac{dy_0}{dv}+\mu(z-z_0)\frac{dz_0}{dv}\right)\right\}=0,$$

ami csak akkor fajúlhat el síkká, ha v-nek minden értéke mellett

$$\frac{d\mu}{dv}=2ik'^2\frac{\text{snvi dnvi}}{\text{cn}^3\text{vi}}=0,$$

ez pedig csak úgy lehetséges, ha $k'=0$.

Ezen eset megvizsgálása céljából irjunk (6.) alatti egyenleteinkbe w helyébe $(w+K)$-t és térjünk át a limesre, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$(6_1)\quad\left\{\begin{aligned}
x' &= \lim_{k'=0}\Re\left\{\frac{U}{k'^2}-\alpha i\int_{-K}^{0}\frac{\text{cn}^2w}{\text{dn}^2w}\,dw\right\}=\Re\left\{\alpha iw-\beta i\,\text{Chw}+\gamma\,\text{Shw}\right\}\\
y' &= \lim_{k'=0}\Re\left\{\frac{V-\gamma}{k'^2}-\beta i\int_{-K}^{0}\frac{\text{sn}^2w}{\text{dn}^2w}\,dw\right\}=\\
&= \Re\left\{-\alpha i\,\text{Chw}+\frac{\beta i}{2}\left(\text{Shw Chw}-w\right)-\frac{\gamma}{2}\,\text{Sh}^2w\right\}\\
z' &= \lim_{k'=0}\Re\left\{\frac{W-\beta}{k'^2}+\gamma i\int_{-K}^{0}\frac{1}{\text{dn}^2w}\,dw\right\}=\\
&= \Re\left\{\alpha\,\text{Shw}-\frac{\beta}{2}\text{Sh}^2w-\frac{\gamma i}{2}\left(\text{Shw Chw}+w\right)\right\},
\end{aligned}\right.$$

hol $\quad Shw = \frac{e^w - \bar{e}^w}{2} \qquad Chw = \frac{e^w + \bar{e}^w}{2},$

azaz:

$$(7)_1 \begin{cases} x' = -\alpha v + \beta\, Shu\ sinv + \gamma\, Shu\ cosv, \\ y' = \alpha\, Shu\ sinv - \frac{\beta}{2}\left\{\left(Sh^2u + Ch^2u\right) sinv.\ cosv - v\right\} \\ \qquad - \frac{\gamma}{2}\left\{Sh^2u.\ cos^2v - Ch^2u.\ sin^2v\right\} \\ z' = \alpha\, Shu\ cosv - \frac{\beta}{2}\left\{Sh^2u.\ cos^2v - Ch^2u.\ sin^2v\right\} \\ \qquad + \frac{\gamma}{2}\left\{\left(Sh^2u. + Ch^2u\right) sinv.\ cosv + v\right\} \end{cases}$$

Ha röviden $Shu = t, \qquad Chu = \sqrt{1 + t^2}$, akkor:

$$x' = a_0 + a_1 t$$
$$y' = b_0 + b_1 t + b_2 t^2,$$
$$z' = c_0 + c_1 t + c_2 t^2,$$

hol $a_0 \ldots c_2$ csakis v-nek függvényei. Itt tehát a $v = const.$ vonalak parabolák. Ezen felületek tehát azonosak az Enneper-féle felületekkel.

Vegyünk nehány speciális esetet szemügyre.

Ha $\quad \alpha \neq 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0,$

akkor $\quad x' = -\alpha v, \quad y' = \alpha\, Shu\ sinv, \quad z' = \alpha\, Shu\ cosv,$

miből $\quad \frac{y'}{z'} = -tg\frac{x'}{\alpha},$

ami a közönséges (Meusnier-féle) csavarfelület egyenlete.

Ha $\quad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma \neq 0,$

akkor

$$x' = \gamma\, Shu\ cosv. \qquad y' = -\frac{\gamma}{2}\{Sh^2u\ cos^2v - Ch^2u\ sin^2v\},$$

$$z' = \frac{\gamma}{2}\left\{(Sh^2u + Ch^2u) sinv.cosv + v\right\}.$$

$v = 0$-nál:

$$x' = \gamma Shu, \qquad y' = -\frac{\gamma}{2} Sh^2u, \qquad z' = 0,$$

tehát $$y' = -\frac{1}{2\gamma}x'^2, \qquad z' = 0.$$

Ez egy parabola, és pedig mint geodätikus vonal, mert v helyett (—v)-t írván a felület egyenletébe, x' és y' változatlan marad, z' pedig ellentettjébe megy át, ami azt jelenti, hogy a parabola síkja symmetria-sík.

u = 0-nál :

$$x' = 0 \qquad y' = \frac{\gamma}{2}\sin^2 v = \frac{\gamma}{4}(1-\cos 2v),$$

$$z' = \frac{\gamma}{2}(\sin v \,.\, \cos v + v) = \frac{\gamma}{4}(2v + \sin 2v),$$

ami egy cykloid és pedig szintén, mint geodätikus vonal. Ez a felület tehát azonos a Catalan-féle felülettel.

Ugyanezt a felületet adja az

$$\alpha = 0, \qquad \beta \neq 0, \qquad \gamma = 0$$

feltétel is.

2.

Ossian Bonnet szerint[1] minden minimálfelülethez tartozik egy másik min. felület, az u. n. „adjungált", melyre a felület leborítható, és pedig úgy, hogy az egyik felület görbületi vonalainak a másik felület asymptotikus vonalai felelnek meg és viszont. H. A. Schwarz[2] az adjungált felület egyenleteinek előállítására igen elegáns módot mutatott. Szerinte, ha egy min. felület egyenletei :

(4) $$x' = \Re U, \qquad y' = \Re V, \qquad z' = \Re W,$$

akkor az adjungálté :

(4') $$x' = \Re[iU], \qquad y' = \Re[iV], \qquad z' = \Re[iW],$$

hol i a képzetes egység.

[1] Comptes Rendus, t. 37, 1853, p. 532.

[2] l. c. p. 175.

Irjunk (6) alatti egyenleteinkbe w helyett w' + K + iK'-et, akkor, mivel

$$\operatorname{sn}(w'+K+iK') = \frac{1}{k}\operatorname{dn}\left(\frac{w'}{i}, k'\right),$$

$$\operatorname{cn}(w'+K+iK') = -\frac{k'}{k}\,i\,\operatorname{cn}\left(\frac{w'}{i}, k'\right),$$

$$\operatorname{dn}(w'+K+iK') = -k'\operatorname{sn}\left(\frac{w'}{i}, k'\right),$$

azért a (6.) alatti egyenletek, additiv constansoktól eltekintve, a következőkbe mennek át:

$$(6').\quad \left\{\begin{aligned} iW &= \left(\gamma\frac{k'^2}{k^2}\right) i\int_0^{w'} k^2\operatorname{sn}^2\frac{w'}{i}\,d\frac{w'}{i} - \left(-\beta\frac{k'^2}{k^2}\right)\frac{ki}{k'^2}\operatorname{dn}\frac{w'}{i} \\ &\quad - \left(\alpha\frac{k'^2}{k^2}\right)k\operatorname{cn}\frac{w'}{i}, \\ -iV &= -\left(\gamma\frac{k'^2}{k^2}\right)\frac{ki}{k'^2}\operatorname{dn}\frac{w'}{i} + \left(-\beta\frac{k'^2}{k^2}\right) i\int_0^{w'}\operatorname{cn}^2\frac{w'}{i}\,d\frac{w'}{i} \\ &\quad + \left(\alpha\frac{k'^2}{k^2}\right)\operatorname{sn}\frac{w'}{i}, \\ iU &= -\left(\gamma\frac{k'^2}{k^2}\right)k\operatorname{cn}\frac{w'}{i} + \left(-\beta\frac{k'^2}{k^2}\right)\operatorname{sn}\frac{w'}{i} \\ &\quad - \left(\alpha\frac{k'^2}{k^2}\right) i\int_0^{w'}\operatorname{dn}^2\frac{w'}{i}\,d\frac{w'}{i}. \end{aligned}\right\} \text{mod: } k'.$$

Ezen egyenletek egyeznek a (6) alatti egyenletekkel, ha coordinata-rendszerünket úgy forgatjuk el, hogy az (x, y, z) tengelyek helyébe a (z, — y, x) tengelyeket tesszük, ha továbbá (6) alatti egyenleteinkben a k modulust k'-vel, az α, β, γ constansokat $\frac{k'^2}{k^2}\gamma$, $-\frac{k'^2}{k^2}\beta$, $\frac{k'^2}{k^2}\alpha$ constansokkal cseréljük ki, ha $w = u + iv$ helyett $\frac{w'}{i} = (v - K') + i\,(K - u)$ változót

irjuk és ha végre az U, V, W mennyiségek mindenikét a képzetes egységgel megszorozzuk.

Ebből következik, hogy a (4) és (6) alatti egyenletekkel meghatározott minden min. felületnek az Ossian Bonnet-féle adjungáltja is az ezen egyenletekkel meghatározott felületek közt van, és pedig az

$$(\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad k)$$

parameterekhez tartozó felületnek a

$$(\gamma\frac{k'^2}{k^2}, \quad -\beta\frac{k'^2}{k^2}, \quad \alpha\frac{k'^2}{k^2}, \quad k')$$

parameterekhez tartozó felület az adjungáltja.

A másodrendű kúpok az adjungált felületet az u = const. vonalak mentén érintik, itt tehát ezen vonalak az algebrai görbék.

Bonnetnek azon rendkivül fontos felfedezéséből,[1] hogy a min. felületeknek a Gauss-féle gömbre való leképezése conformis, következik, hogy az U, V, W síkok mindenikére conformis a leképezés[2] és mivel ezek w-nek analytikai függvényei, azért a w-síkra is conformis a min. felület leképezése. Utóbbi síkon a felület algebrai görbéinek és ezek orthogonális trajectoriáinak a coordinata-tengelyekkel párhuzamos egyenesek felelnek meg, miből az is következik, hogy a felületen az algebrai görbék és orthogonális trajectoriái isometrikus rendszert alkotnak. Ha egy felületet az adjungáltjára ráborítunk, akkor az algebrai görbék orthogonális trajectoriáiból lesznek az új helyzetben az algebrai görbék és az eredeti algebrai görbékből lesznek az új algebrai görbék orthogonalis trajectoriái.[3]

A hyperbolával, mint geodätikus vonallal biró felületnél:

$$(\alpha = 0, \quad \beta \neq 0, \quad \gamma = 0, \quad 0 < k < 1)$$

adjungáltjánál:

$$(\alpha' = 0, \quad \beta' = -\beta\frac{k'^2}{k^2} \neq 0, \gamma' = 0, \quad 0 < k' < 1),$$

[1] Liouville-féle Journal, 5(2)-ik kötet, 1860, p. 227.
[2] l. Schwarz, l. c. p. 176—177, [3] ibid. p. 205.

tehát az adjungált felület ismét egy hyperbolát, mint geodätikus vonalat tartalmaz és pedig, ha az egyik felületnek az xz síkban a (12) alatti hyperbola:

$$k'^2z^2 - k^2x^2 = \beta^2\frac{k'^2}{k^2}$$

egy geodätikus vonala, akkor az adjungáltnak:

$$k^2x^2 - k'^2z^2 = \left(-\beta\frac{k'^2}{k^2}\right)^2\frac{k^2}{k'^2} = \beta^2\frac{k'^2}{k^2},$$

tehát a conjugált hyperbola egy geodätikus vonala.

Ha a hyperbola egyenlő-oldalú ($k = k'$), akkor a min. felület congruens az adjungáltjával.

A cyklikus min. felületek parameterei:

$$(\alpha = \rho k, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \pm\rho k', \qquad k)$$

lévén, az adjungált felület parameterei:

$$\left(\alpha' = \left(\pm\rho\frac{k'^2}{k^2}\right)k', \quad \beta = 0, \quad \gamma = \left(\rho\frac{k'^2}{k^2}\right)k, \quad k'\right).$$

A cyklikus min. felületek tehát egymás közt adjungáltak.

Ha $k = k'$, akkor a cyklikus min. felület congruens az adjungáltjával.

Nézzük, van-e a (4) és (6) alatti egyenleteinkkel meghatározott felületek közt más is, mely az adjungáltjával congruens?

Az $\qquad (\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad k)$

és $\qquad \left(\gamma\frac{k'^2}{k^2}, \quad -\beta\frac{k'^2}{k^2}, \quad \alpha\frac{k'^2}{k^2}, \quad k'\right)$

parameterekhez tartozó felületek csakis akkor lehetnek congruensek, ha congruens elliptikus hengert congruens vonal mentén érintenek, tehát ha

$$\alpha = +\gamma, \qquad \beta = \pm\beta, \qquad k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az $\qquad \alpha = \pm\gamma, \qquad \beta = 0, \qquad k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

eset speciális cyklikus min. felületet,

az $\alpha = \gamma = 0, \quad \beta \neq 0, \quad k = \frac{1}{|2}$

eset egyenlőoldalú hyperbolával, mint geodätikus vonallal biró min. felületet jelent. Az általános eset ezeknek geometriai additiójából származik.

3.

A min. felületek differentiálegyenletének Monge-féle megoldását,[1] mely szerint

$$x = A(t) + A_1(\tau)$$
$$y = B(t) - B_1(\tau)$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

alakú egyenletek állítanak elő legáltalánosabban param. alakban egy min. felületet, hol t és τ két korlátlan complex változó, A . . . C_1 tetszőleges függvények, azon feltétel mellett, hogy

$$dA^2 - dB^2 - dC^2 = 0$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0$$

legyen, Sophus Lie[2] úgy fogta fel, hogy minden min. felület translatio-felület, nevezetesen Lie elnevezése szerint két „minimálgörbe" translatiójából származik, olyan (képzetes) görbét jelölvén e névvel, melynek minden érintője a végtelen távoli képzetes gömbkör valamely pontja felé mutat, vagyis melynek ívhossza zérus.

Ha az A függvény A_1-el, B B_1-el és C C_1-el azonos, akkor a felület Lie szerint „kettős-felület."

Most kimutatom, hogy a (4) és (6) alatti egyenletekkel definiált valamennyi felület, — a k = 0 határesetnek, vagyis az Enneper-féle felületek adjungáltjainak kivételével — kettős felület.

[1] l. Lacroix: Traité du Calcul diff. et integr., 2. éd., t. 2., Paris, 1814, p. 623—631.

[2] Mathem. Annalen, XIV. Bd., 1878, p. 331—416, stb.

A (4) alatti egyenletek ugyanis így írhatók:

$$x' = \tfrac{1}{2}(U(w) + U_1(w_1)),$$
$$y' = \tfrac{1}{2}(V(w) + V_1(w_1)),$$
$$z' = \tfrac{1}{2}(W(w) + W_1(w_1)),$$

hol az „1" index azt jelenti, hogy az illető complex mennyiségnek a conjugáltja veendő, vagyis benne i (—i)-vel cserélendő ki.

Az $U(w)$, $V(w)$, $W(w)$

függvényeket egyrészről, az

$U_1(w_1)$, $V_1(w_1)$, $W_1(w_1)$

függvényeket másrészről egy-egy görbe futó pontjának coordinátáiként fogva fel, két minimálgörbét kapunk, mert a (6) alatti egyenlętek szerint

$$dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0$$

és

$$dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0.$$

A felírt egyenletek tehát a min. felület Monge-féle előállítását adják.

Legyen először

$$0 < k < 1.$$

Vezessünk be w_1 helyébe új változót, w'-et:

$$w_1 = -w' + 2K + 2iK',$$

akkor

$$snw_1 = snw' \qquad dnw_1 = -dnw'$$
$$cnw_1 = cnw' \qquad dw_1 = -dw'$$

és így

$$(13.)\quad \begin{cases} U_1(w_1) = -\alpha i \int_0^{w_1} k'^2 sn^2 w_1 dw_1 + \beta \frac{k'i}{k^2} dnw_1 \\ \qquad\qquad - \gamma k' cnw_1 = U(w') + \text{const.}, \\ V_1(w_1) = \alpha \frac{k'i}{k^2} dnw_1 - \beta i \int_0^{w_1} cn^2 w_1 dw_1 \\ \qquad\qquad + \gamma snw_1 = V(w') + \text{const.}, \\ W_1(w_1) = -\alpha k' cnw_1 + \beta snw_1 \\ \qquad\qquad + \gamma i \int_0^{w_1} dn^2 w_1 dw_1 = W(w') + \text{const.} \end{cases}$$

Tehát $x' = \frac{1}{2}U(w) + \frac{1}{2}U(w') + \text{const.},$

$y' = \frac{1}{2}V(w) + \frac{1}{2}V(w') + \text{const.},$

$z' = \frac{1}{2}W(w) + \frac{1}{2}W(w') + \text{const.}$

A felület tehát csakugyan kettős-felület.

E tulajdonságot vegyük közelebbről szemügyre.

A legutóbbi egyenletek szerint a felület minden pontja kétszer jön elő, ha t. i. w és w'-et egymással felcseréljük, ugyanazon pontot kapjuk.

Nézzük, mit jelent geometriailag a w és w' felcserélése?

Weierstrass szerint[1] minden reális min. felület (a síktól eltekintve) a következő egyenletekkel állítható elő:

$$(14.)\quad \begin{cases} x = \Re\int(1-s^2)\mathfrak{f}(s)ds, \\ y = \Re\int i(1+s^2)\mathfrak{f}(s)ds, \\ z = \Re\int 2s\mathfrak{f}(s)ds, \end{cases}$$

hol $\mathfrak{f}(s)$ egy analytikai függvény. Az „s" változónak geometriai jelentése van. Nevezetesen a felületnek párhuzamos normálisok szerint a Gauss-féle gömbre való leképezését az északi pólusból az aequator síkjára vetítve, „s" azt a complex változót jelenti, mit e sík pontjai a szokott módon geometriailag ábrázolnak.

(4.) és (6.) alatti egyenleteinkkel összevetve a (14.) alattiakat, azt látjuk, hogy

$$\frac{1-s^2}{2s} = \frac{dU}{dW}, \quad \frac{1+s^2}{2s} = -i\frac{dV}{dW}$$

és ebből

$$(15.)\quad s = -i\frac{dV}{dW} - \frac{dU}{dW} = \frac{cnw}{dnw} - ik'\frac{snw}{dnw}$$
$$= sn(w+K) + icn(w+K),$$

és

$$\frac{1}{s} = -i\frac{dV}{dW} + \frac{dU}{dW} = \frac{cnw}{dnw} + ik'\frac{snw}{dnw}$$
$$= sn(w+K) - icn(w+K)$$

[1] Monatsberichte der K. P. Akadémie zu Berlin, 1866, p. 619.

Ha a (6.) alatti egyenletek jobboldalába w helyébe w'-et írunk, akkor a (13.) alatti kifejezésekhez jutunk, melyekből hasonló módon:

$$s' = -i\frac{dV(w')}{dW(w')} - \frac{dU(w')}{dW(w')} = -\frac{cnw_1}{dnw_1} + ik'\frac{snw_1}{dnw_1}$$
$$= -\left\{sn(w_1+K) + icn(w_1+K)\right\} = -\frac{1}{s_1},$$

ami azt jelenti, hogy s és s' a gömbön diametriálisan szembenfekvő pontok. Tehát a min. felület ugyanazon pontjához két ellentétes irányú normális tartozik. Ha egy pontból az egyik normálissal, vagyis az egyik w-értékkel indulunk ki és a felületen folytonos úton mozogva folytonos módon változtatjuk w-t, akkor (ha a képzetes pontokat is figyelembe vesszük), lehet a felületen olyan útat találni, hogy visszatérve a kiindulási ponthoz $w' = -w_1 + 2K - 2iK'$-vel, vagyis az ellenkező irányú normálissal érkezünk vissza. A felület tehát egyoldalú.

A $k = o$ és $k' = o$ esetek külön megvizsgálást igényelnek, mert ekkor K', illetőleg K végtelen nagy.

A $k' = o$ esetben a $(6)_1$. alatti egyenletek baloldalával hasonló módon járva el, w_1 helyébe a következőkép vezessünk be új változót:

$$w_1 = -w' + i\pi,$$

akkor, minthogy

$$Shw_1 = Shw', \qquad Chw_1 = -Chw',$$

azonnal látható, hogy ezek is kettős-felületek, mint azt M. Peche is észrevette.[1]

A $k = o$ esethez tartozó felületek azonban már nem kettős-felületek, mert

[1] A bevezetésben idézett inaug.-dissert., p. 35.

$$(6)_2 \quad \begin{cases} \lim\limits_{k=o} \left\{ U + \beta i \dfrac{k'}{k^2} \right\} = \dfrac{\alpha i}{4}(2w - \sin 2w) + \dfrac{\beta i}{2}\sin^2 w \\ \qquad\qquad - \gamma \cos w, \\ \lim\limits_{k=o} \left\{ V + \alpha \dfrac{k'}{k^2} \right\} = \dfrac{\alpha i}{2}\sin^2 w + \dfrac{\beta i}{4}(2w + \sin 2w) \\ \qquad\qquad + \gamma \sin w, \\ \lim\limits_{k=o} W = -\alpha \cos w + \beta \sin w - \gamma i w. \end{cases}$$

Ebből $s = -i\dfrac{dV}{dW} - \dfrac{dU}{dW} = e^{-iw}$,

$$\frac{1}{s} = -i\frac{dV}{dW} + \frac{dU}{dW} = e^{iw}.$$

Ha a conjugált görbe pontjainak coordinátái:

$$U(w'), \qquad V(w'), \qquad W(w')$$

volnának, akkor

$$s' = e^{-iw'} = -\frac{1}{s_1} = -e^{-iw_1} \text{ volna, azaz}$$

$$w_1 = (2k + 1)\pi + w',$$

mikor is

$$\sin w_1 = -\sin w', \qquad \cos w_1 = -\cos w'$$

volnának, ezen substitutióval pedig, — bármi legyen is α, β, γ — sohasem lehet

$$U_1(w_1) = U(w') + \text{const.}, \text{ stb.}$$

4.

A vizsgált felületcsoporthoz tartozó minden felület a $k = o$ határeset kivételével periodikus.

Mert, ha $o < k < 1$, akkor

$$E(w + 2iK') = E(w) + 2i(K' - E')$$

lévén, a (6.) alatti egyenletekből következik, hogy

$$U(w + 4iK') = U(w) - 4\alpha\frac{k'^2}{k^2}E',$$

$$V(w + 4iK') = V(w) + \frac{4\beta}{k^2}(E - k^2K'),$$

$$W(w + 4iK') = W(w) + 4\gamma(K' - E').$$

A $(6)_1$ alatti egyenletek szerint a $k' = o$ határesethez tartozó felületek is periodikusok, periodusuk w-re nézve: $2\pi i$. A $k = o$ eset felületei azonban nem periodikusok, mint azt a $(6)_2$ alatti egyenletek mutatják.

Nevezetes tulajdonsága a vizsgált felületcsoportnak, hogy az idetartozó valamennyi felület (minthogy mindegyik egy algebrai görbesereget tartalmaz), a tér végtelen távoli síkját egyenesekben metszi, nevezetesen azon két egyenesben, melyben a cyklikus síkok két serege is metszi azt. Kivételes viselkedést mutatnak a cyklikus min. felületek, melyek a végtelen távoli síkot csak egy egyenesben metszik, ott t. i., hol a rajtuk levő körök (párhuzamos) síkjai metszik azt.

A (4) és (6) alatti egyenletek szerint ugyanis az x, y, z coordináták csakis a

$$w = 2mK + (2n+1)iK'$$

helyeken válhatnak végtelenné, (m és n tetszőleges egész számok), hol az U, V, W függvényeknek elsőrendű pólusai vannak. Az ezen helyekhez tartozó residuumok a következők:

$$\text{Res } U = -i\alpha\frac{k'^2}{k^2} + (-1)^{n+1}\beta\frac{k'}{k^2} - (-1)^{m+n}\gamma i\frac{k'}{k},$$

$$\text{Res } V = (-1)\alpha^{n+1}\frac{k'}{k^2} + \beta\frac{i}{k^2} + (-1)^m\gamma\frac{1}{k},$$

$$\text{Res } W = (-1)^{m+n}\alpha i\frac{k'}{k} + (-1)^m\beta\frac{1}{k} - \gamma i.$$

Minthogy

$$\text{Res}\left\{k\,U + (-1)^{m+n}k'\,W\right\} = 0,$$

azért a $w = 2mK + (2n+1)iK'$ értékhez tartozó végtelen távoli idom a

$$\sin\varepsilon.\,x + (-1)^{m+n}\cos\varepsilon.\,z = \text{const.}$$

cyklikus síkban van. A felület végtelen távoli idoma tehát csakis a két cyklikus síksereg végtelen távoli egyenese lehet.

A $0 < k < 1$ esetben tehát végtelen sok asymptota-síkja van a felületnek.

A $w = 2mK + (2n+1)iK'$ hely nem végtelenségi helye

a felületnek, ha ezen a helyen valamennyi residuum eltűnik. Ez előáll akkor és csak akkor, ha

$$\alpha = \rho k, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = (-1)^{m+n} \rho k',$$

vagyis cyklikus min. felületnél.

Ekkor a végtelenségi idom csak a

$$\sin \varepsilon . x - (-1)^{m+n} \cos \varepsilon . z = \text{const.}$$

cyklikus síknak, a felületen levő körök síkjainak végtelen távoli egyenese.

Az általános esetnél fellépő két végtelen távoli egyenes összeesik, ha

$$k' = 0 \quad \text{vagy} \quad k = 0,$$

mikor is a cyklikus síkok két serege összeesik. Tehát egyrészt az Enneper-féle felületeknél (és ezek határeseténél: a csavarfelületnél), másrészt ezek adjungáltjainál (pl. a catenoidnál).

A felület singuláritásai a következők.

Ha a képzetes pontokat is figyelembe vesszük, akkor, (mint minden min. felületnél), az

$$ss_1 + 1 = 0,$$

azaz most a

$$w + w_1 = (4m+2) K + (4n+2) i K'$$

vonalak a felületnek visszatérő élei (Rückkehrkante).

Visszatérő élek továbbá az

$$\alpha ik' snw + \beta icnw + \gamma dnw = 0$$

egyenletnek eleget tevő w-értékekhez tartozó charakteristikák ($w = \text{const.}$ minimálgörbék) és ezek conjugáltjai, mert ezen w, illetve w_1 értékeknél az egyik minimálgörbe mindhárom coordinátájának első differentiál-hányadosa egyszerre tünik el.

A (9) alatti egyenletekkel definiált görbének azon része, mely a felülethez tartozik, a felületnek kettős-éle. Ezen vonal mentén ugyanis a felület áthatol saját magán.

Egy-egy kúp csúcsából az azon kúpon levő algebrai görbét tartalmazó gömb középpontjába mutató vector irány-cosinusai arányosak (α, β, γ)-val, mint azt a (11) alatti egyenlet mutatja. Ha ez az irány a reciprók kúp belsejébe

mutat, akkor a gömb a kúpot olyan görbében metszi, mely nem megy át a kúp csúcsán, a metszőgörbének tehát nem lesz singuláris pontja; ha az (α, β, γ) irány a reciprók kúpon kivüli irány, akkor a gömb a csúcsnál vág bele a kúpba, a metszőgörbének itt kettőspontja van, ez a pont a felületnek egy biplanáris kettőspontja lesz; ha pedig az (α, β, γ) irány a reciprók kúp egyik alkotójának iránya, akkor a metszésgörbe szintén átmegy a kúp csúcsán, a görbének ekkor itt egy kettős érintője van, ez a pont a felületnek egy uniplanáris kettőspontja.

Az (α, β, γ) iránynak megfelelő pont a Gauss-féle gömbön:

$$s_0 = \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \gamma}.$$

Az uniplanáris kettősponthoz tartozó w-érték eleget tesz tehát a következő egyenletnek:

$$(15_0) \quad s_0 = \operatorname{sn}(w + K) + i \operatorname{cn}(w + K)$$

t. i. az (α, β, γ) irány képe a Gauss féle gömbön összeesik az uniplanáris kettősponthoz tartozó felületi normális Gauss-féle képével, mert itt az algebrai görbét tartalmazó gömb érinti a felületet.

Egyenletünkből:

$$= \frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \gamma},$$

és ebből $\qquad v = \Re \frac{1}{i} w.$

A $\quad \ldots -3K', \; -K', \; K', \; 3K', \ldots$

értékektől határolt intervallumok mindenikében egy-egy ilyen v-érték van, és pedig, ha pl. a $-K'$ és $+K'$ közti v-értéket v_0 jelöli, akkor v különböző értékei:

$$v = 2nK' + (-1)^n v_0.$$

$$w = \int_1^{\frac{1+s_0^2}{2s_0}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

T. i. a w fenti integrálkifejezésének $w = 2niK' + 4mK - (-1)^n w_0$ alakú értékei (ha a w_0 képzetes részében az i szorzója a definiált v_0), nem elégítik ki a (15$_0$) alatti egyenletet.

Tehát minden periodus-darabon két uniplanáris kettőspont van, melyek coordinátáit a (9) alatti egyenletek adják, ha ide v-nek kiszámított értékeit írjuk be.

Minden ilyen pontból kiindúl egy-egy kettős-él és, ha $\beta \neq o$, elhúzódik a periodus-darab végtelen távoli idomáig.

Ha $\beta = o$, akkor minden kettősél két-két uniplanaris kettőspontot köt össze, nevezetesen, ha v_0 positiv, akkor a

v_0-hoz tartozó pontot a $(2K' - v_0)$-hoz tartozóval; a
$(4K' + v_0)$-hoz „ „ „ $(6K' - v_0)$ „ „ stb.,

ha pedig v_0 negativ, akkor a

v_0-hoz tartozó pontot a $(-2K' - v_0)$-hoz tartozóval; a
$(4K' + v_0)$-hoz „ „ „ $(2K' - v_0)$ „ „ stb.

Ha $v_0 = \pm K'$, azaz, ha

$$\beta = o, \text{ és } \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| \leqq \frac{k}{k'},$$

akkor ez a kettősél egészen eltünik.

A (9) alatti egyenletek alapján nem nehéz a kettősél menetét közelebbről is figyelemmel kisérni.

A $\beta = o$ esetben a $v = (2n + 1)K'$ értékekhez tartozó algebrai görbék maguk is kettős egyenesekké lesznek. Ekkor t. i. a (12) alatti hyperbolikus henger két síkká esik szét, melyek metszővonala alkotja a kettősélt.

A $\gamma = o$ esetben a $v = 2nK'$ értékekhez tartozó algebrai görbék kettősegyenesek. Ekkor t. i. az (1) alatti elliptikus henger egyetlen egyenessé húzódik össze, mely a felület kettősélévé lesz.

Végre a periodus-darabok egymáson is áthatolnak egy-egy kettősél mentén.

5.

Weierstrass érdekes összefüggést mutatott a minimálfelületek és az analytikai függvények közt. Szerinte minden $f(s)$ analytikai függvényhez egy minimálfelület tartozik, mely a (14.) alatti egyenletekkel van előállítva.

Ha egy min. felülethez ismeretes a megfelelő $f(s)$ függvény, akkor a görbületi és asymptotikus vonalak rendszere, a görbületi sugár, a görbületi középpontok alkotta két felület könnyen meghatározhatók, továbbá általa könnyen található olyan sík, melyre a min. felület olykép van conformisan leképezve, hogy a coordinata-tengelyekkel párhuzamos egyenesek a görbületi vonalak képeit, az azokhoz 45^0 alatt hajló egyenesek az asymptotikus vonalak képeit alkotják.[1]

Ennélfogva nem lesz érdektelen a vizsgált felületcsoporthoz tartozó $f(s)$ függvényt kiszámítani.

A (6.) és (14.) alatti egyenletek összevetéséből, mint láttuk:

$$\frac{1-s^2}{2s} = \frac{dU}{dW} = ik' \frac{snw}{dnw},$$

$$\frac{1+s^2}{2s} = \frac{1}{i}\frac{dV}{dW} = \frac{cnw}{dnw},$$

miből

$$\frac{1}{dn^2w} = \left(\frac{1}{ik'}\frac{1-s^2}{2s}\right)^2 + \left(\frac{1+s^2}{2s}\right)^2$$

és ebből

$$dnw = \frac{2sk'}{k\sqrt{(p^2-s^2)\left(s^2-\frac{1}{p^2}\right)}}, \quad p = \frac{1-k'}{k} = \frac{k}{1-k'},$$

és a fentebbi egyenletek szerint

$$cnw = \frac{(1+s^2)\,k'}{k\sqrt{(p^2-s^2)\left(s^2-\frac{1}{p^2}\right)}},$$

[1] l. pl. Darboux: Leçons etc. t. I. p. 302—303.

$$\operatorname{snv} = \frac{1-s^2}{ki\sqrt{(p^2-s^2)\left(s^2-\frac{1}{p^2}\right)}}.$$

Pl. a snw kifejezésének differentiálásával és a cnw és dnw kifejezéseinek figyelembe vételével azt kapjuk továbbá, hogy

$$\frac{dw}{ds} = \frac{2i}{k\sqrt{(p^2-s^2)\left(s^2-\frac{1}{p^2}\right)}}.$$

Ezekből

$$f(s) = \frac{1}{1-s^2}\frac{dU}{dw}\cdot\frac{dw}{ds} = \frac{1}{i(1+s^2)}\frac{dV}{dw}\cdot\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2s}\frac{dW}{dw}\cdot\frac{dw}{ds}$$

$$= \frac{2k'^2}{k^3}\cdot\frac{\alpha(1-s^2)+\beta i(1+s^2)+2\gamma s}{\left[(p^2-s^2)\left(s^2-\frac{1}{p^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$